Métodos Matemáticos I
Topología de $\mathbb{C}$. Sucesiones y series

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

November 9, 2012

- La topología de $\mathbb{C}$ es la topología de $\mathbb{R}^2$.

- La topología de $\mathbb{C}$ es la topología de $\mathbb{R}^2$.
- *Disco abierto* de centro a y radio $r > 0$:

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

Por convenio pondremos $D(a, +\infty) = \mathbb{C}$.

- La topología de $\mathbb{C}$ es la topología de $\mathbb{R}^2$.
- *Disco abierto* de centro a y radio $r > 0$:

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

  Por convenio pondremos $D(a, +\infty) = \mathbb{C}$.
- *Disco cerrado* de centro a y radio $r \geqslant 0$:

$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$$

- La topología de $\mathbb{C}$ es la topología de $\mathbb{R}^2$.
- *Disco abierto* de centro a y radio $r > 0$:

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

  Por convenio pondremos $D(a, +\infty) = \mathbb{C}$.
- *Disco cerrado* de centro a y radio $r \geqslant 0$:

$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$$

- Circunferencia de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$:

$$C(a,r)^* = \{z \in C : |z - a| = r\}$$

- La topología de $\mathbb{C}$ es la topología de $\mathbb{R}^2$.
- *Disco abierto* de centro a y radio $r > 0$:

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

  Por convenio pondremos $D(a,+\infty) = \mathbb{C}$.
- *Disco cerrado* de centro a y radio $r \geqslant 0$:

$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\}$$

- Circunferencia de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$:

$$C(a,r)^* = \{z \in C : |z-a| = r\}$$

- $A \subset \mathbb{C}$ está ***acotado*** si existe $M > 0$ tal que $|z| \leqslant M$ para todo $z \in A$.

Conexos y dominios

- $C \subset \mathbb{C}$ se dice que es ***conexo*** si la única *partición* de C por *abiertos relativos* es la trivial.

Conexos y dominios

- $C \subset \mathbb{C}$ se dice que es ***conexo*** si la única *partición* de C por *abiertos relativos* es la trivial.
- Los únicos conexos en la recta real son los intervalos.

Conexos y dominios

- $C \subset \mathbb{C}$ se dice que es ***conexo*** si la única *partición* de C por *abiertos relativos* es la trivial.
- Los únicos conexos en la recta real son los intervalos.
- Un ***dominio*** es un conjunto abierto y conexo.

Caracterización de los dominios

Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Equivalen las siguientes propiedades:

- Ω es un dominio.

Caracterización de los dominios

Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Equivalen las siguientes propiedades:

- Ω es un dominio.
- Los únicos subconjuntos de Ω que son abiertos y cerrados relativos de Ω son el $\emptyset$ y Ω.

Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Equivalen las siguientes propiedades:

- Ω es un dominio.
- Los únicos subconjuntos de Ω que son abiertos y cerrados relativos de Ω son el $\emptyset$ y Ω.
- Dos puntos cualesquiera de Ω pueden unirse por una curva contenida en Ω.

Conjuntos compactos

Sea $K \subset \mathbb{C}$. Equivalen las siguientes propiedades:

- K es cerrado y acotado.

Conjuntos compactos

Sea $K \subset \mathbb{C}$. Equivalen las siguientes propiedades:

- K es cerrado y acotado.
- Toda sucesión de puntos de K tiene alguna sucesión parcial que converge a un punto de K.

Conjuntos compactos

Sea $K \subset \mathbb{C}$. Equivalen las siguientes propiedades:

- K es cerrado y acotado.
- Toda sucesión de puntos de K tiene alguna sucesión parcial que converge a un punto de K.

Conjuntos compactos

Sea $K \subset \mathbb{C}$. Equivalen las siguientes propiedades:

- K es cerrado y acotado.
- Toda sucesión de puntos de K tiene alguna sucesión parcial que converge a un punto de K.

Los conjuntos que verifican estas propiedades se llaman ***compactos***.

Propiedades de conexión y compacidad de las funciones continuas

- Toda función continua que toma valores reales definida en un compacto alcanza en dicho compacto un valor máximo y un valor mínimo absolutos.

Propiedades de conexión y compacidad de las funciones continuas

- Toda función continua que toma valores reales definida en un compacto alcanza en dicho compacto un valor máximo y un valor mínimo absolutos.
- Toda función continua que toma valores reales o complejos definida en un compacto es uniformemente continua.

Propiedades de conexión y compacidad de las funciones continuas

- Toda función continua que toma valores reales definida en un compacto alcanza en dicho compacto un valor máximo y un valor mínimo absolutos.

- Toda función continua que toma valores reales o complejos definida en un compacto es uniformemente continua.

- Las funciones continuas transforman conexos en conexos y compactos en compactos.

Sucesiones convergentes

Una sucesión de números complejos es una *aplicación* de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{C}$.

Sucesiones convergentes

Una sucesión de números complejos es una *aplicación* de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{C}$.

Representaremos por $\{z_n\}$ la sucesión dada por $n \mapsto z_n$ donde $z_n \in \mathbb{C}$.

Sucesiones convergentes

Una sucesión de números complejos es una *aplicación* de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{C}$.

Representaremos por $\{z_n\}$ la sucesión dada por $n \mapsto z_n$ donde $z_n \in \mathbb{C}$.

$\{z_n\}$ es *convergente* si $\exists z \in \mathbb{C}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|z_n - z| < \varepsilon$.

Sucesiones convergentes

Una sucesión de números complejos es una *aplicación* de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{C}$.

Representaremos por $\{z_n\}$ la sucesión dada por $n \mapsto z_n$ donde $z_n \in \mathbb{C}$.

$\{z_n\}$ es *convergente* si $\exists z \in \mathbb{C}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|z_n - z| < \varepsilon$.

En tal caso dicho número z es único y escribimos $\lim\{z_n\} = z$ o $\{z_n\} \to z$ y se dice que z es el límite de la sucesión $\{z_n\}$.

Teniendo en cuenta las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l}|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|\end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Teniendo en cuenta las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l}|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|\end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos:

Teniendo en cuenta las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos:

$$\lim\{z_n\} = z \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\{\operatorname{Re} z_n\} = \operatorname{Re} z \\ \lim\{\operatorname{Im} z_n\} = \operatorname{Im} z \end{array}\right.$$

Se dice que $\{z_n\}$ es **divergente**, y escribimos $\{z_n\} \to \infty$ si $\{|z_n|\} \to +\infty$.

Se dice que $\{z_n\}$ es **divergente**, y escribimos $\{z_n\} \to \infty$ si $\{|z_n|\} \to +\infty$.

- Si $\{z_n\} \to z$ y $\{w_n\} \to w$, entonces $\{z_n + w_n\} \to z + w$ y $\{z_n w_n\} \to zw$. Además, si $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \neq 0$, entonces $\{1/z_n\} \to 1/z$.

Se dice que $\{z_n\}$ es **divergente**, y escribimos $\{z_n\} \to \infty$ si $\{|z_n|\} \to +\infty$.

- Si $\{z_n\} \to z$ y $\{w_n\} \to w$, entonces $\{z_n + w_n\} \to z + w$ y $\{z_n w_n\} \to zw$. Además, si $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \neq 0$, entonces $\{1/z_n\} \to 1/z$.
- Si $\{z_n\} \to \infty$ y $\{w_n\}$ está acotada entonces $\{z_n + w_n\} \to \infty$.

Se dice que $\{z_n\}$ es **divergente**, y escribimos $\{z_n\} \to \infty$ si $\{|z_n|\} \to +\infty$.

- Si $\{z_n\} \to z$ y $\{w_n\} \to w$, entonces $\{z_n + w_n\} \to z + w$ y $\{z_n w_n\} \to zw$. Además, si $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \neq 0$, entonces $\{1/z_n\} \to 1/z$.
- Si $\{z_n\} \to \infty$ y $\{w_n\}$ está acotada entonces $\{z_n + w_n\} \to \infty$.
- Si $\{z_n\} \to \infty$ y $\{w_n\}$ está separada de 0, esto es, existen $\rho > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \geqslant n_0$ se cumple $|w_n| \geqslant \rho$, entonces $\{z_n w_n\} \to \infty$.

Se dice que $\{z_n\}$ es de *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geqslant n_0$ se verifica que $|z_p - z_q| < \varepsilon$.

Se dice que $\{z_n\}$ es de *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geqslant n_0$ se verifica que $\left|z_p - z_q\right| < \varepsilon$.

Teorema de complitud de $\mathbb{C}$.

Toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente.

Una *sucesión parcial* de una sucesión $\{z_n\}$ es cualquier sucesión de la forma $\{z_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente.

Teorema de Bolzano–Weierstrass

Una *sucesión parcial* de una sucesión $\{z_n\}$ es cualquier sucesión de la forma $\{z_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente.

Si $\{z_n\} \to z$, entonces cualquier sucesión parcial de $\{z_n\}$ también converge a z.

Teorema de Bolzano–Weierstrass

Una *sucesión parcial* de una sucesión $\{z_n\}$ es cualquier sucesión de la forma $\{z_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente.

Si $\{z_n\} \to z$, entonces cualquier sucesión parcial de $\{z_n\}$ también converge a z.

Teorema de Bolzano –Weierstrass.

Toda sucesión acotada de números complejos tiene alguna sucesión parcial convergente.

Dada una sucesión, $\{z_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{S_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{z_n\}$, es decir:

$$S_1 = z_1, \; S_2 = z_1 + z_2, \; S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \ldots, \; S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \ldots$$

Dada una sucesión, $\{z_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{S_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{z_n\}$, es decir:

$$S_1 = z_1,\ S_2 = z_1 + z_2,\ S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \dots, S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \dots$$

La sucesión $\{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} z_k \right\}$ así obtenida se llama *serie de término general* z_n y es costumbre representarla por $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ o, más sencillamente, $\sum z_n$.

Si una serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ para representar su límite que suele llamarse *suma* de la serie.

Si una serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ para representar su límite que suele llamarse *suma* de la serie.

Naturalmente $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\{S_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Si una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ para representar su límite que suele llamarse *suma* de la serie.

Naturalmente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\{S_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ converge si, y sólo si, las series

$$\operatorname{Re}\Big(\sum_{n\geqslant 1} z_n\Big) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Re} z_n \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}\Big(\sum_{n\geqslant 1} z_n\Big) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Im} z_n$$

son convergentes.

Condición **necesaria** para que la serie $\sum z_n$ converja es que $\{z_n\} \to 0$.

Condición **necesaria** para que la serie $\sum z_n$ converja es que $\{z_n\} \to 0$.

Se dice que una serie de números complejos $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ ***converge absolutamente*** si la serie de términos positivos $\sum\limits_{n\geqslant 1} |z_n|$ es convergente.

Condición **necesaria** para que la serie $\sum z_n$ converja es que $\{z_n\} \to 0$.

Se dice que una serie de números complejos $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} z_n$ ***converge absolutamente*** si la serie de términos positivos $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |z_n|$ es convergente.

Si una serie de números complejos $\sum z_n$ es absolutamente convergente entonces dicha serie también es convergente.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos.

- **Criterio de Dirichlet.** Si $\{a_n\}$ es monótona y converge a cero y la serie $\sum z_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n z_n$ converge.

Convergencia no absoluta. Criterios abelianos

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos.

- **Criterio de Dirichlet.** Si $\{a_n\}$ es monótona y converge a cero y la serie $\sum z_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n z_n$ converge.
- **Criterio de Abel.** Si $\{a_n\}$ es monótona y acotada y la serie $\sum z_n$ converge, entonces $\sum a_n z_n$ es convergente.